



نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

شماره صندلی:

حوزه امتحانی:

استان/منطقه:

شماره پرونده:

مطابق توضیحات  
دفترچه تکمیل شود

کد دفترچه

۲

نام و نام خانوادگی خود را  
با دستخط بنویسید.

از نوشتن اعداد به صورت انگلیسی جداً خودداری نمایید.

|    |  |   |   |   |   |
|----|--|---|---|---|---|
| ۱  |  |   |   |   | ۵ |
| ۲  |  |   |   |   | ۴ |
| ۳  |  |   |   |   | ۲ |
| ۴  |  |   |   |   | ۵ |
| ۵  |  |   |   |   | ۹ |
| ۶  |  |   |   |   | ۴ |
| ۷  |  | ۱ | ۸ | ۲ | ۴ |
| ۸  |  |   |   |   | ۲ |
| ۹  |  |   | ۹ | ۶ | ۵ |
| ۱۰ |  |   |   | ۳ | ۷ |
| ۱۱ |  |   |   |   | ۴ |
| ۱۲ |  |   |   | ۱ | ۳ |
| ۱۳ |  |   |   |   | ۳ |

|    |  |   |   |   |   |
|----|--|---|---|---|---|
| ۱۴ |  |   |   |   | ۱ |
| ۱۵ |  |   |   |   | ۲ |
| ۱۶ |  |   |   |   | ۳ |
| ۱۷ |  |   | ۳ | ۵ | ۵ |
| ۱۸ |  |   |   |   | ۲ |
| ۱۹ |  |   |   |   | ۳ |
| ۲۰ |  |   |   |   | ۴ |
| ۲۱ |  |   |   | ۵ | ۲ |
| ۲۲ |  |   |   |   | ۵ |
| ۲۳ |  |   |   | ۱ | ۵ |
| ۲۴ |  | ۱ | ۳ | ۹ | ۵ |
| ۲۵ |  |   |   |   | ۲ |
| ۲۶ |  |   |   |   |   |



باسمه تعالی  
جمهوری اسلامی ایران  
وزارت آموزش و پرورش  
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان  
معاونت دانش پژوهان جوان

باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

## دفترچه سوالات مرحله اول

سی و یکمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۱

صبح - ساعت : ۹:۰۰

کد دفترچه : ۱

| تعداد سوالات | مدت آزمون (دقیقه) |
|--------------|-------------------|
| ۲۵           | ۱۸۰               |

### توضیحات مهم

#### استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ‌نامه علامت بزنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد برگه سوالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه برگه‌های دفترچه سوالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسوول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسوول جلسه را مطلع کنید.
۴. برگه پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و علاوه خوانا و پر رنگ بنویسید.
۵. سوال‌های این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است که از هم تفکیک نشده‌اند. پاسخ درست به هر دو نوع سوال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سوال پنج گزینه‌ای یک نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سوال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۷. آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند، در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل شود.



# آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور

دانش آموز عزیز، سؤال های این آزمون به دو شکل پنج گزینه ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج گزینه ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید. جواب سؤال های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰/۷۳ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ نامه، چنین چیزی بنویسید:

|  |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|
|  | ۶ | ۹ | ۵ | ۰ |
|--|---|---|---|---|

در مورد سؤال های پنج گزینه ای شماره گزینه درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینه شماره ۳ درست است باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ نامه، چنین چیزی بنویسید:

|  |  |  |  |   |
|--|--|--|--|---|
|  |  |  |  | ۳ |
|--|--|--|--|---|

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه های بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به علاوه به هیچ وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. مأمور آمار، یک سرشماری در شهرستان انجام داده است. فراوانی نسبی تعداد خانواده ها به صورت زیر است:

|                     |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|
| تعداد اعضای خانواده | ۲  | ۳  | ۴  | ۵  | ۶  |
| درصد                | ۱۰ | ۳۰ | ۳۰ | ۱۰ | ۲۰ |

چند درصد از مردم، در خانواده های ۲ نفری زندگی می کنند؟

۲. کم ترین مقدار  $\frac{a^2}{b}$  در مجموعه زیر چند است؟

$$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, (a+1)(b+1) = ab, 0 \leq b\}$$

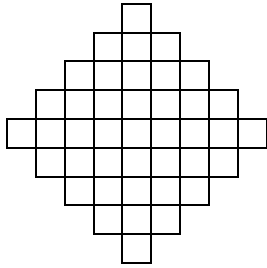
۳. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ کدام از رقم های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش پذیر باشد؟



# آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور

۴. در دوزنقه متساوی الساقین  $ABCD$  طول ضلع  $AB$  برابر ۴ و طول دو ساق  $AD$  و  $BC$  برابر ۲ است. زاویه  $\angle ABC$  نیز برابر  $120^\circ$  درجه است. اگر  $E$  محل برخورد دو قطر دوزنقه باشد، نسبت  $\frac{BE}{DE}$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     (۲)  $\sqrt{3} - 1$     (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     (۴)  $\frac{5}{9}$     (۵)  $\frac{2}{3}$



۵. تعدادی مهر مربعی شکل با ابعاد  $1 \times 1$ ،  $2 \times 2$ ،  $3 \times 3$ ،  $4 \times 4$  و  $5 \times 5$  به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک مهر را آغشته به رنگ کرده و سپس با کوبیدن آن روی نقشه روبه‌رو آن را رنگ کنیم به طوری که تمامی سطح مهر درون نقشه قرار گیرد. دست‌کم چند بار باید مهر روی نقشه بکوبیم تا همه جای نقشه رنگ شود؟ (ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)

۶. چند زوج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 3 \\ xy + x + y = 11 \end{cases}$$

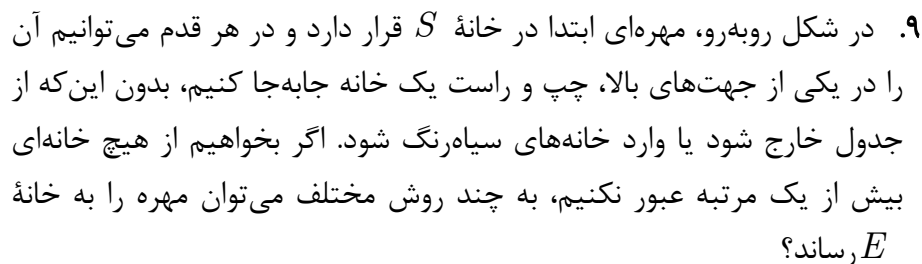
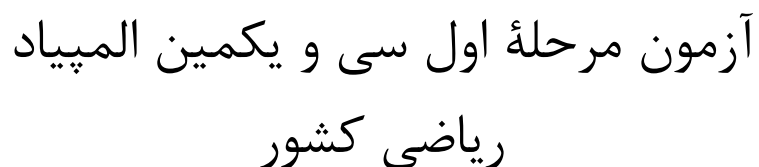


۷. در لحظه‌ای که ماهواره امید در ارتفاع ۲۵۶ کیلومتری از سطح زمین قرار داشته، فاصله ماهواره تا دورترین نقطه روی زمین که می‌توانسته آن را ببیند چند کیلومتر بوده است؟ (زمین را کره‌ای به شعاع ۶۳۷۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

۸. چند چهارتایی  $(a, b, c, d)$  از اعداد طبیعی در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند؟

$$a^b = cd, \quad b^c = da, \quad c^d = ab, \quad d^a = bc.$$

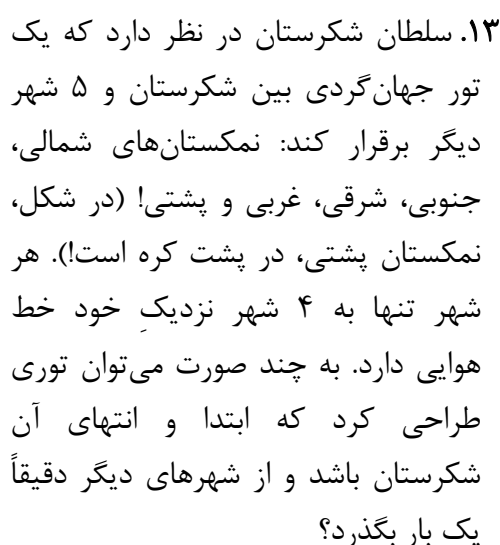
- (۱) ۱    (۲) ۲    (۳) ۶    (۴) ۸    (۵) بی‌نهایت



۱۱. برای دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  عمل  $\wedge$  به این صورت تعریف می‌شود:  $a \wedge b = a^b$ . عمل  $\otimes$  نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

که در عبارت سمت راست،  $a$ ،  $b$  مرتبه ظاهر شده است. در این صورت  $a \otimes b$  برابر است با:

۱۲. در مثلث  $ABC$ ، میانه‌های نظیر رأس  $B$  و رأس  $C$  بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع  $AB$  و  $AC$  به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد. طول ضلع  $BC$  چه قدر است؟



زمان برگزاری: ۱۳۹۱/۱۱/۲۶



# آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور

۱۴. به تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابعی  $n$  مقداری می‌گوییم اگر برد آن مجموعه‌ای  $n$  عضوی باشد. اگر  $f$  و  $g$  به ترتیب  $n$  و  $m$  مقداری باشند. توابع  $f + g$ ،  $f \times g$  و  $f \circ g$ ، به ترتیب حداکثر چند مقداری هستند؟

(۱)  $mn$ ،  $mn$  و  $\min(m, n)$  (۲)  $mn$ ،  $m + n$  و  $\max(m, n)$

(۳)  $m + n$ ،  $mn$  و  $n^m$  (۴)  $m + n$ ،  $mn$  و  $mn$

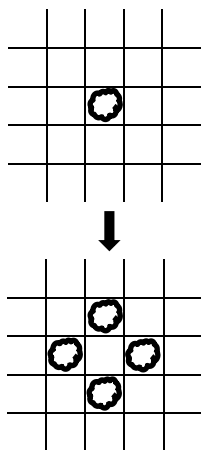
(۵)  $\max(m, n)$ ،  $mn$  و  $mn$

۱۵. در دوزنقه قائم‌الزاویه  $ABCD$ ،  $(\angle A = \angle D = 90^\circ)$ ،  $M$  وسط ضلع  $BC$  است. فرض کنید دایره به مرکز  $M$  و شعاع  $MB$ ، درون پاره خط  $AD$  را در  $X$  و  $Y$  قطع کند. اگر  $AB = 1$  و طول پاره‌خط‌های  $BC$ ،  $CD$  و  $DA$  به ترتیب  $p$ ،  $q$  و  $r$  باشد. طول پاره‌خط‌های  $AX$  و  $AY$  ریشه‌های کدام معادله زیر هستند؟

(۱)  $x^2 + px + q$  (۲)  $x^2 - rx + q$  (۳)  $x^2 - px + q$

(۴)  $qx^2 + rx + p$  (۵)  $px^2 - qx + r$

۱۶. جمع صورت و مخرج چند تا از کسرهای  $\frac{1}{90}, \frac{2}{90}, \dots, \frac{90}{90}$ ، بعد از ساده کردن بر ۳ بخش پذیر است؟



۱۷. در خانه‌های یک شبکه مربعی نامتناهی، گونه‌ای باکتری به نام «چارزا» زندگی می‌کند. در هر خانه هر تعداد چارزا می‌توانند هم‌زمان زندگی کنند. بعد از یک ساعت هر چارزا به چهار چارزا تقسیم شده و هر کدام به یکی از چهار خانه مجاور می‌رود. اگر در ابتدا فقط یک چارزا وجود داشته باشد، بعد از شش ساعت چند چارزا در خانه‌ای است که با خانه ابتدایی فقط یک رأس مشترک دارد؟ (به طور مثال پس از یک ساعت فقط در هر کدام از چهار خانه مجاور خانه آغازی، دقیقاً یک چارزا وجود خواهد داشت).

۱۸. چند زیرمجموعه چهار عضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دویه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعه  $\{2, 8, 9, 32, 36, 144\}$  شود؟



# آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور

۱۹. تابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  این گونه تعریف شده است که  $f(1) = 1$  و برای  $n > 1$  اگر تجزیه  $n$  به عوامل اول به صورت  $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$  باشد، آن گاه  $f(n) = r_1^{p_1} \cdots r_k^{p_k}$ . کدام درست است؟  
( $p_i$  ها اعداد اول متمایزند و  $r_i$  ها اعداد طبیعی هستند.)

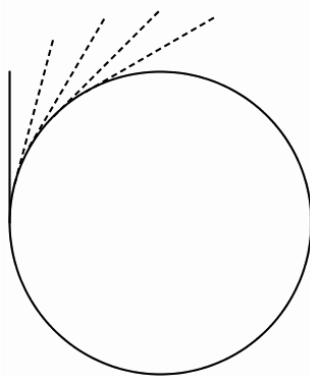
(۱)  $f$  پوشا است.

(۲)  $f$  یک به یک است.

(۳) اگر  $a$  و  $b$  عضو برد  $f$  باشند، آن گاه  $ab$  عضو برد  $f$  است.

(۴) برای هر دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$ ،  $f(m)f(n) \leq f(mn)$ .

(۵) برای هر دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$ ،  $f(m)f(n) \geq f(mn)$ .



۲۰. چرخ به شعاع ده متر از مرکز به وسیله محوری به زمین متصل شده، طوری که می تواند آزادانه حول آن محور بچرخد. میله ای به طول ده متر به شکل مماس به چرخ متصل شده است. اگر چرخ  $60^\circ$  بچرخد، نزدیک ترین گزینه به مساحت نقطه هایی که این میله از روی آن ها عبور می کند، (بر حسب متر مربع) کدام است؟ (شکل وضعیت میله در ابتدا، انتها و سه لحظه بینی را نشان می دهد.)

(۵) ۶۰

(۴) ۵۰

(۳) ۴۰

(۲) ۳۰

(۱) ۲۰

۲۱. دنباله  $\{a_n\}$  با دو عدد حقیقی دلخواه  $a_1$  و  $a_2$  شروع می شود و جمله های بعدی آن از رابطه  $a_{n+2} = \max\{a_{n+1} - 1, a_n + 1\}$  به دست می آیند. اگر  $a_{100} = 100$ ، بیش ترین مقدار ممکن برای  $a_1$  چند است؟

|   |   |
|---|---|
|   | ۱ |
| ۳ | ۲ |
| ۴ |   |

۲۲. احسان و حسام در جدولی  $3 \times 2$  مطابق شکل، با هم مهره بازی می کنند. در این بازی هر کس در نوبت خودش می تواند یک مهره در یکی از خانه های خالی جدول قرار دهد یا یکی از مهره های موجود را به خانه سمت راستش یا خانه بالایش منتقل کند، البته اگر آن خانه خالی باشد. بازنده اولین کسی است که نتواند حرکتی انجام دهد. احسان برای شروع بازی در کدام یک از خانه های شماره گذاری شده، مهره را قرار دهد تا بتواند بازی را ببرد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

(۵) در هر کدام از این چهار حالت، حسام می تواند طوری بازی کند که برنده شود.



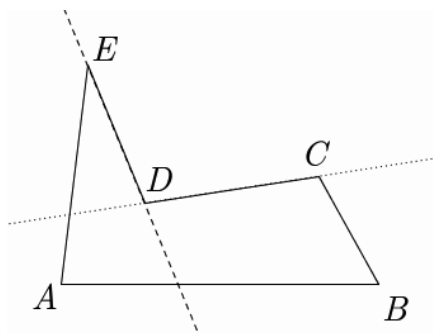
# آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد

## ریاضی کشور

۲۳. تعداد جواب‌های معادله زیر در اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، با شرط  $x \leq y$  را بیابید.

$$x^2 + y^2 = xy(x, y) + [x, y].$$

منظور از  $(x, y)$ ، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک  $x$  و  $y$  و منظور از  $[x, y]$  کوچک‌ترین مضرب مشترک  $x$  و  $y$  است.



۲۴. منظور از یک ضلع «ناجور» در یک چندضلعی که اضلاع آن یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، ضلعی است که دو ضلع مجاورش در دو طرف خط شامل آن قرار دارند. مثلاً در پنج‌ضلعی روبه‌رو تنها ضلع‌های  $DE$  و  $CD$  ناجور هستند. یک ۱۳۹۱ ضلعی حداکثر چند ضلع ناجور می‌تواند داشته باشد؟

۲۵. روی سطح کره‌ای، ۴ دایره رسم شده است. سطح این کره حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۱۷ (۵)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)